EXERCICES
Série 4

<u>Exercice 6</u> : Utilisation de la matrice [T] et des conventions de signes

I- <u>Association de quadripôles</u>.
On considère le circuit représenté figure1 ci-dessous.

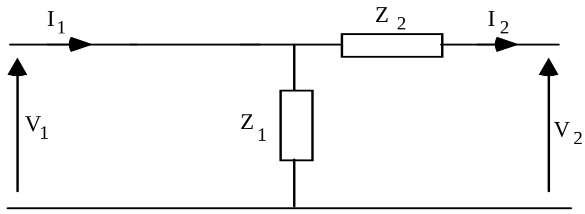

Figure 1

I-1. Déterminer la matrice transférance [T] du circuit. On conseille d'effectuer les calculs avec soin, même s'ils s'avèrent relativement simples, car le résultat est utilisé pour la suite.

I-2. On associe N cellules identiques à celle de la figure 1 en cascade.
I-2.1. Déterminer la forme de la matrice transférance $[T_N]$ résultante
I-2.2. Exprimer $[T_N]$ en fonction de Z_1 et Z_2 dans le cas où N=2.

I-3. Deux cellules identiques à celle de la figure 1 sont associées en cascade
I-3.1. Déterminer l'impédance d'entrée de la cellule de transférance $[T_2]$ en fonction de ses paramètres T_{ij} ; l'exprimer en fonction de Z_1 et Z_2.
I-3.2. La cellule de transférance $[T_2]$ est chargée côté droit (en V_2) par une impédance Z. Déterminer la nouvelle impédance d'entrée en fonction des paramètres T_{ij} ; l'exprimer en fonction de Z_1 , Z_2 et Z.
Faire l'application numérique dans les deux cas avec $Z_1 = 100\ \Omega + j0$, $Z_2 = 220\ \Omega + j0$ et Z infinie ou $Z = 75\ \Omega + j0$.

I-4. On choisit Z de telle sorte que lorsque la cellule de transférance $[T_2]$ est chargée par Z, l'impédance vue de l'entrée est elle-même égale à Z.
I-4.1. Montrer que l'on peut déterminer deux valeurs de Z qui satisfont à cette condition
I-4.2. Donner les valeurs de Z correspondantes

I-5. Détermination de Z avec les valeurs numériques de Z_1 et Z_2 données au I-3.
I-5.1. Quelles sont les valeurs numériques de Z ?
I-5.2. Les deux valeurs sont-elles réalisables à partir de composants passifs ? De quelle façon ?

II- On considère maintenant le quadripôle de la figure2 ci-dessous. Q est défini par sa matrice [T] ; on définit le "quadripôle" Q' (à une seule impédance) représentant l'impédance Z à partir de sa matrice [T']. On appelle I'_2 et V'_2 respectivement les courants et tensions à la sortie de ce quadripôle Q'. En associant les deux quadripôles en cascade, on obtient le circuit de la figure2.

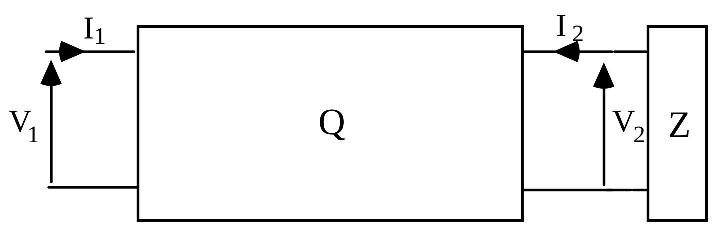

Figure2

II-1. Déterminer les éléments de la matrice équivalente aux deux quadripôles Q et Q' en cascade, soit $[T_{éq}]$

II-2. Déduire du résultat précédent l'expression de $Z_e = \frac{V_1}{I_1}$

II-3. En déduire les expressions de R_e et de X_e

<u>Exercice 7</u> : L'adaptation d'impédance

On a montré dans le cours que l'impédance Z vue à travers le quadripôle Q (impédance image de Z à travers Q), voir figure2 ci-dessus, s'écrivait :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z + Z_{22}} \quad (1)$$

Dans cet exercice on va établir comment choisir convenablement les Z_{ik} de la matrice impédance de Q pour transformer une impédance Z = R+jX en une impédance $Z_e = R_e + jX_e$

Etant donné que le problème comporte une double infinité de solutions (4 paramètres réglables pour seulement deux équations), on va ajouter des contraintes qui vont permettre de le résoudre tout en le simplifiant.

Première contrainte : le quadripôle est choisi passif et non dissipatif.

1- Donner les expressions des Z_{ik} en choisissant la forme $Z_{ik} = R_{ik} + jX_{ik}$; pour $i \neq k$, on pourra poser $X_{12} = X_{21} = B$.

Comparer le résultat obtenu avec celui de l'expression du II-2. de l'exercice 6.

2- Donner la nouvelle expression de Z_e établie à partir de (1)

3- Retrouver les expressions de R_e et de X_e obtenues au II-3. de l'exercice 6.

4- Le problème initial a-t-il maintenant une solution unique?

Deuxième contrainte : On pose $X_{11} = X_{22} = A$

5- A quel type de quadripôle a-t-on affaire désormais?

6- La solution au problème d'adaptation est-elle maintenant unique?

<u>Exercice 8</u> : Détermination des éléments physiques d'un quadripôle adaptateur d'impédance

Soit le schéma de la figure3 ci-dessous représentant une charge Z = R+jX alimentée par une source d'impédance interne $Z_i = R_i + jX_i$.

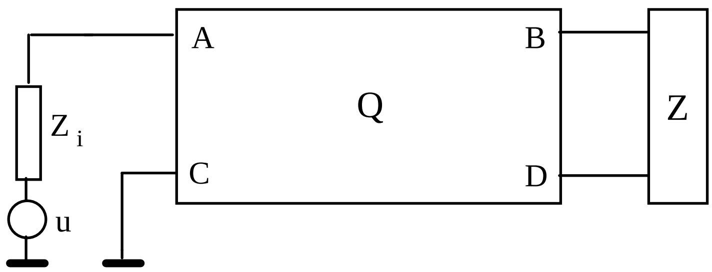

Figure3

Pour une transmission maximum de puissance, on sait que la charge doit présenter une valeur conjuguée par rapport à celle de la source. Comme ce n'est pas le cas ici, on a interposé un quadripôle qui devra produire une impédance image de Z égale à Z_i conjuguée ($\overline{Z_i}$).

D'après l'exercice 7, on sait que ce problème admet des solutions.

1- Faire un schéma du circuit faisant apparaître le générateur u et son impédance $Z_i=R_i+jX_i$, la charge Z=R+jX, ainsi qu'un quadripôle adaptateur sous la forme d'un biporte en T. Les trois impédances du biporte seront notées Z_1, Z_2 et Z_3, selon l'ordre habituel.

On considère maintenant les biportes Z_1, Z_2 et Z_3,dont les accès sont A, B et C-D (C et D communs) et A', B', C-D. Pour ce dernier, A' est placé entre R_i et X_i, avec X_i entre A et A' ; B' est placé entre R et X, avec X entre B et B'.

2- Compléter le schéma du 1, ci-dessus.

On pose $V_1= V_{AC}$; $V_2= V_{BC}$; $V'_1= V_{A'C}$; $V'_2= V_{B'C}$; I_1 et I_2, respectivement, sont les courants d'entrée et de sortie. En supposant le problème d'adaptation résolu, on aura : $\frac{V_1}{I_1}=R_i - jX_i$. Calculer l'impédance ramenée en A'.

3- Que peut-on dire du biporte A'B'C-D (du point de vue du type de transformation qu'il effectue)? Cette remarque est de nature à simplifier considérablement le problème.

4- En appliquant la relation du 1 de l'exercice 7, exprimer R_i en fonction des Z_{ik} du biporte A'B'C-D.

5- Exprimer les valeurs des Z_{ik} à l'aide des impédances du schéma construit au 2 ci-dessus. (On reprendra les notations utilisées à l'exercice 7).

6- Donner l'expression de R_i en utilisant ces valeurs de Z_{ik}.

On va maintenant résoudre l'équation trouvée en 6 ci-dessus. Celle-ci doit pouvoir être mise sous la forme : $\begin{cases} R_iR+X_{11}X_{22}-B^2=0 & (2) \\ R_iX_{22}-RX_{11}=0 & (3) \end{cases}$

7- Exprimer le produit $X_{11}X_{22}$ à partir de (2) ; on obtient une équation (2')

8- En posant $\frac{X_{11}}{R_i}=\frac{X_{22}}{R}=k$, calculer k^2 afin de pouvoir faire apparaître la valeur du produit $X_{11}X_{22}$; on obtient une équation (3').

9- Ecrire (3') avec les éléments du circuit électrique (biporte A'B'C-D)

10- Dans l'expression ci-dessus, il apparaît une condition sur |B|. Quelle est cette condition?

11- On posera $B=\pm\frac{\sqrt{R_iR}}{\cos\beta}$ avec $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

12- Ré-écrire (3') et en déduire les solutions (détermination de B, X_1 et X_2)

13- Il existe une quadruple infinité de solutions. Donner les deux schémas possibles du biporte adaptateur pour le cas particulier où β =0.