

**EA 119 – CIRCUITS et SYSTEMES II**

La partie B est une application de la partie A mais elle peut être traitée indépendamment

**Partie A**

On s'intéresse au quadripôle de la figure 1 ci-dessous :

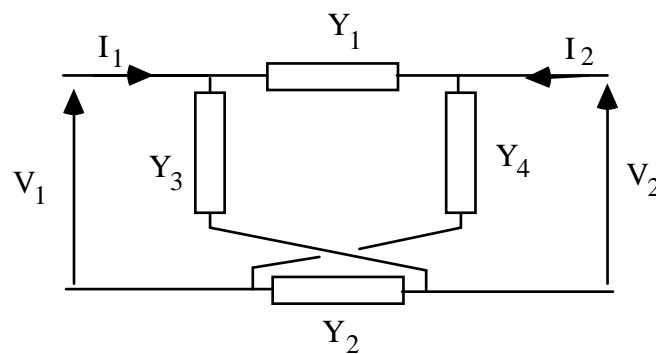


Figure1

A-1. Déterminer la matrice admittance  $[Y]$  de ce quadripôle.

Conseils : Pour  $Y_{11}$  et  $Y_{22}$ , il est plus avantageux d'exprimer leurs inverses ; pour  $Y_{12}$  et  $Y_{21}$ , on pourra reprendre les résultats obtenus en cours et en travaux dirigés.

A-2. Montrer qu'on peut décomposer ce quadripôle en deux quadripôles plus simples associés en parallèle (faire un schéma clair).

A-3. Déterminer les matrices admittance  $[Y'_1]$  et  $[Y'_2]$  de chacun de ces deux quadripôles élémentaires.

A-4. Déterminer la matrice admittance  $[Y'] = [Y'_1] + [Y'_2]$ .

A-5. Pourquoi n'a-t-on pas  $[Y] = [Y']$  ?

**Partie B**

On s'intéresse à nouveau au circuit de la figure 1.

$Y_1$  est l'admittance d'une bobine  $L_1$ ,  $Y_2$  est l'admittance d'une bobine  $L_2$ ,  $Y_3$  est l'admittance d'un condensateur  $C_1$ ,  $Y_4$  est l'admittance d'un condensateur  $C_2$ .

B-1. Déterminer les éléments  $Y_{ij}$  de la matrice admittance ainsi constituée (ne pas donner les résultats sous forme de calculs inachevés).

Conseils : Voir A-1, d'une part et effectuer de préférence les calculs en pulsations complexes, d'autre part ; ne passer aux pulsations réelles qu'en fin de calcul.

Les éléments  $Y_{11}$  et  $Y_{12}$  de la matrice admittance seront mis sous la forme

$$\frac{1 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4}{j\omega \left[ b_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) + b_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \right]}$$

et les éléments  $Y_{12}$  et  $Y_{21}$  sous la forme 
$$\frac{a'_1 \omega^4 - 1}{j\omega \left[ b_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) + b_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \right]}$$

B-2. Il y a non transmission lorsqu'en appliquant la grandeur d'entrée, tension ou courant, sur l'entrée/la sortie, la grandeur de sortie correspondante, courant ou tension, devient nulle.

On donne  $L_1=10$  mH ;  $L_2=20$  mH ;  $C_1=20$  nF ;  $C_2=10$  nF.

Existe-t-il une (ou plusieurs) pulsation(s) de non transmission?

B-3. Que deviennent les éléments de la matrice admittance lorsque  $L_1=L_2=L$  et que  $C_1=C_2=C$  ?

B-4. Que se passe-t-il à la (aux) pulsation(s) de non transmission?

B-5. Pour ceux qui ont encore du temps : On connecte une impédance  $Z$  en sortie (côté  $V_2$ ) du quadripôle de la figure 1. Donner l'expression de l'impédance d'entrée  $Z_e$  en fonction des  $Y_{ij}$  et de  $Z$ .

Conseils : S'inspirer de ce qui a été fait en travaux dirigés, mais travailler en admittances.

## Corrigé EA 119 – CIRCUITS

### PARTIE A

A-1. Détermination des éléments de la matrice admittance.

*Détermination de  $Y_{11}$  et de  $Y_{22}$*

$Y_{11}$  : Sortie en court circuit ;  $Y_1$  et  $Y_3$  sont en parallèle ainsi que  $Y_2$  et  $Y_4$ . On en déduit :

$$\frac{1}{Y_{11}} = \frac{1}{Y_1 + Y_3} + \frac{1}{Y_2 + Y_4} \quad \Rightarrow Y_{11} = \frac{(Y_1 + Y_3)(Y_2 + Y_4)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

$Y_{22}$  : Entrée en court circuit ;  $Y_3$  et  $Y_4$  sont échangées. On en déduit :

$$Y_{22} = \frac{(Y_1 + Y_4)(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

*Détermination de  $Y_{12}$  et de  $Y_{21}$*

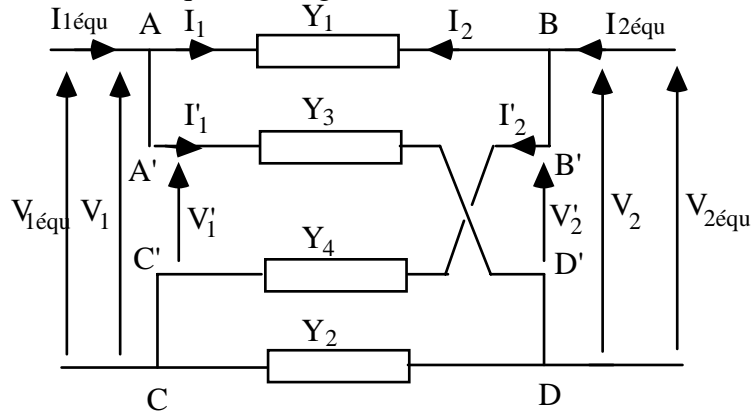
Ces coefficients sont égaux (quadripôle passif avec  $I_2$  entrant). De plus leur valeur a été déterminée en cours et en travaux dirigés dans le cas général d'un quadripôle à 6 admittances.

On a obtenu :  $Y_{12} = Y_{21} = \frac{Y_5 Y_6 - Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6}$  avec les analogies suivantes :

Q général	Q de la figure 1
$Y_1$	0
$Y_2$	0
$Y_3$	$Y_1$
$Y_4$	$Y_2$
$Y_5$	$Y_3$
$Y_6$	$Y_4$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{Y_3 Y_4 - Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

A-2. La décomposition est indiquée à la figure ci-dessous.



A-3. Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  les deux quadripôles.

$$\text{Matrice admittance de } Q_1 : [Y'_1] = \begin{bmatrix} \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} & -\frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \\ -\frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} & \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice admittance de } Q_2 : [Y'_2] = \begin{bmatrix} \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} & \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} \\ \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} & \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} \end{bmatrix}$$

$$\text{A-4. On obtient : } [Y'] = \begin{bmatrix} \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} + \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} & \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} - \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \\ \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} - \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} & \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} + \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4} \end{bmatrix}$$

Les coefficients de  $[Y']$  sont différents de ceux obtenus en A-1.

On a vu en cours que l'association en parallèle ne conduisait à la somme des matrices admittances partielles que si les conditions de Guillemin étaient satisfaites.

Conditions de Guillemin pour l'association parallèle :

Condition 1: on met chaque sortie en court circuit et on vérifie que  $V_{CD} = V_{C'D'}$

Calcul de  $V_{CD}$  : B et D sont court-circuités

$$V_{CD} = -V_1 \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

Calcul de  $V_{C'D'}$  : B' et D' sont court-circuités

$$V_{C'D'} = -V'_1 \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4}$$

Même si  $V_1 = V'_1$ ,  $V_{CD}$  est a priori différent de  $V_{C'D'}$ .

Condition 2 : on met chaque entrée en court circuit et on vérifie que  $V_{CD} = V_{C'D'}$

Bien que ce soit inutile, on peut vérifier que cette deuxième condition n'est pas non plus satisfaite.

## PARTIE B

B-1. On effectue les calculs comme pour A-1. et on remplace les  $Y_k$  par leur valeur :

$$Y_1 = \frac{1}{L_1 p} ; Y_2 = \frac{1}{L_2 p} ; Y_3 = C_1 p ; Y_4 = C_2 p$$

On trouve :  $\frac{1}{Y_{11}} = \frac{p[L_1(1+L_2C_1p^2)+L_2(1+L_1C_2p^2)]}{1+(L_1C_1+L_2C_2)p^2+L_1C_1L_2C_2p^4}$  ;  $\frac{1}{Y_{22}}$  est obtenu en échangeant  $C_1$  et  $C_2$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{L_1C_1L_2C_2p^4 - 1}{p[L_1(1+L_2C_1p^2)+L_2(1+L_1C_2p^2)]}$$

En régime harmonique on obtient les  $Y_{ij}$  en remplaçant  $p$  par sa valeur imaginaire  $j\omega$ .

$$\boxed{Y_{11} = \frac{1 - (L_1C_1 + L_2C_2)\omega^2 + L_1C_1L_2C_2\omega^4}{j\omega[L_1(1 - L_2C_1\omega^2) + L_2(1 - L_1C_2\omega^2)]}} ; \boxed{Y_{22} = \frac{1 - (L_1C_2 + L_2C_1)\omega^2 + L_1C_1L_2C_2\omega^4}{j\omega[L_1(1 - L_2C_2\omega^2) + L_2(1 - L_1C_1\omega^2)]}}$$

Remarque :  $L_1(1 - L_2C_1\omega^2) + L_2(1 - L_1C_2\omega^2) = L_1(1 - L_2C_2\omega^2) + L_2(1 - L_1C_1\omega^2)$

$$\boxed{Y_{12} = Y_{21} = \frac{L_1C_1L_2C_2\omega^4 - 1}{j\omega[L_1(1 - L_2C_1\omega^2) + L_2(1 - L_1C_2\omega^2)]}}$$

B-2. D'après la définition donnée pour une non transmission, on doit avoir :

$Y_{12} = Y_{21} = 0$  ; on effectue l'application numérique :

$$L_1C_1L_2C_2 = 4.10^{-20} ; L_1C_2 = 10^{-10} ; L_2C_1 = 4.10^{-10}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{4.10^{-20}\omega^4 - 1}{j\omega[10^{-2}(1 - 4.10^{-10}\omega^2) + 2.10^{-2}(1 - 10^{-10}\omega^2)]}$$

Le numérateur s'annule pour  $\boxed{\omega = 70,7 \text{ kHz}}$  ; cette valeur de  $\omega$  n'annule pas le dénominateur.

B-3. On obtient :  $\boxed{Y_{11} = Y_{22} = \frac{1 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4}{2jL\omega(1 - LC\omega^2)} = \frac{1 - LC\omega^2}{2jL\omega}}$

et  $Y_{12} = Y_{21} = \frac{1 - 2LC\omega^2 + L^2C^2\omega^4}{2jL\omega(1 - LC\omega^2)} = \frac{L^2C^2\omega^4 - 1}{2jL\omega(1 - LC\omega^2)}$

Soit :  $\boxed{Y_{12} = Y_{21} = j \frac{1 + LC\omega^2}{2L\omega}}$

B-4. Il n'y a plus de pulsation de non transmission.

$Y_{11}$  (admittance d'entrée à sortie court-circuitée) et  $Y_{22}$  (admittance de sortie à entrée court-circuitée) s'annulent pour  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ; pour cette pulsation, on obtient :

$$\boxed{Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{jL\omega}}$$

B-5. On a les équations :  $\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \\ I_2 = -YV_2 \end{cases}$  On en déduit :  $\boxed{\frac{1}{Z_e} = Y_e = \frac{I_1}{V_1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y + Y_{22}}}$