

Probabilités et Statistiques

IS101

ENSEIRB

2006-2007

Rappels

- ▶ Notion d'espace de probabilités, événement, mesure de probabilités

Rappels

- ▶ Notion d'espace de probabilités, événement, mesure de probabilités
- ▶ Indépendance, probabilités conditionnelles

Rappels

- ▶ Notion d'espace de probabilités, événement, mesure de probabilités
- ▶ Indépendance, probabilités conditionnelles
- ▶ Variable aléatoire ; loi (distribution) d'une v.a.

Rappels

- ▶ Notion d'espace de probabilités, événement, mesure de probabilités
- ▶ Indépendance, probabilités conditionnelles
- ▶ Variable aléatoire ; loi (distribution) d'une v.a.
- ▶ Variables aléatoires indépendantes

Fonction de répartition

La fonction de répartition F_X d'une **variable aléatoire** X caractérise la **loi** de cette variable. Elle est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Fonction de répartition

La fonction de répartition F_X d'une **variable aléatoire** X caractérise la **loi** de cette variable. Elle est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Deux v.a. qui ont la même fonction de répartition ont la même loi ; réciproquement, deux v.a. qui ont la même loi ont la même fonction de répartition.

Fonction de répartition

La fonction de répartition F_X d'une **variable aléatoire** X caractérise la **loi** de cette variable. Elle est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Deux v.a. qui ont la même fonction de répartition ont la même loi ; réciproquement, deux v.a. qui ont la même loi ont la même fonction de répartition.

En revanche, **deux v.a. peuvent avoir la même fonction de répartition sans être égales !**

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)
- ▶ est **continue à droite** en tout point : $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h)$

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)
- ▶ est **continue à droite** en tout point : $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h)$
- ▶ est **limitée à gauche** en tout point :
 $F(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} F(x + h)$ existe

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)
- ▶ est **continue à droite** en tout point : $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h)$
- ▶ est **limitée à gauche** en tout point :
 $F(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} F(x + h)$ existe
- ▶ $F(x^-) = \mathbb{P}(X < x)$

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)
- ▶ est **continue à droite** en tout point : $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h)$
- ▶ est **limitée à gauche** en tout point :
 $F(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} F(x + h)$ existe
- ▶ $F(x^-) = \mathbb{P}(X < x)$
- ▶ $F(x^-) \leq F(x)$, et $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)
- ▶ est **continue à droite** en tout point : $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h)$
- ▶ est **limitée à gauche** en tout point :
 $F(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} F(x + h)$ existe
- ▶ $F(x^-) = \mathbb{P}(X < x)$
- ▶ $F(x^-) \leq F(x)$, et $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire

- ▶ est croissante sur \mathbb{R} (au sens large)
- ▶ est **continue à droite** en tout point : $F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h)$
- ▶ est **limitée à gauche** en tout point :
 $F(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} F(x + h)$ existe
- ▶ $F(x^-) = \mathbb{P}(X < x)$
- ▶ $F(x^-) \leq F(x)$, et $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

De plus, **dès qu'une fonction F vérifie toutes ces propriétés**, c'est la fonction de répartition d'une certaine v.a. sur un espace approprié.

Variables aléatoires discrètes

Définition : Une variable aléatoire X est dite *discrète* s'il existe un ensemble A , *fini ou dénombrable*, tel que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Variables aléatoires discrètes

Définition : Une variable aléatoire X est dite *discrète* s'il existe un ensemble A , *fini ou dénombrable*, tel que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Dans la pratique, une v.a. discrète est une v.a. qui ne peut prendre ses valeurs que dans un ensemble fini ou dénombrable.

Variables aléatoires discrètes

Définition : Une variable aléatoire X est dite *discrète* s'il existe un ensemble A , *fini ou dénombrable*, tel que $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Dans la pratique, une v.a. discrète est une v.a. qui ne peut prendre ses valeurs que dans un ensemble fini ou dénombrable.

Le cas le plus important est celui des **variables aléatoires à valeurs entières**.

Fonction de répartition

La **fonction de répartition** d'une v.a. discrète est (dans la pratique ; en théorie, c'est plus compliqué) constante par morceaux sur des intervalles semi-ouverts (fermés à gauches, ouverts à droite)

Fonction de répartition

La **fonction de répartition** d'une v.a. discrète est (dans la pratique ; en théorie, c'est plus compliqué) constante par morceaux sur des intervalles semi-ouverts (fermés à gauches, ouverts à droite)

Si les valeurs prises par X sont $x_1 < x_2 < \dots$, F_X est constante sur chaque intervalle de la forme $[x_k, x_{k+1}[$.

Loi d'une variable discrète

La loi d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par la donnée d'un ensemble fini ou dénombrable de couples de réels $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ▶ les x_i sont deux à deux distincts

Loi d'une variable discrète

La loi d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par la donnée d'un ensemble fini ou dénombrable de couples de réels $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ▶ les x_i sont deux à deux distincts
- ▶ pour chaque i , $0 \leq p_i \leq 1$

Loi d'une variable discrète

La loi d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par la donnée d'un ensemble fini ou dénombrable de couples de réels $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ▶ les x_i sont deux à deux distincts
- ▶ pour chaque i , $0 \leq p_i \leq 1$
- ▶ $\sum_i p_i = 1$

Loi d'une variable discrète

La loi d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par la donnée d'un ensemble fini ou dénombrable de couples de réels $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ▶ les x_i sont deux à deux distincts
- ▶ pour chaque i , $0 \leq p_i \leq 1$
- ▶ $\sum_i p_i = 1$

Chaque fois que l'on a un tel ensemble de couples, on peut définir la loi d'une variable aléatoire discrète X par

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

Loi d'une variable discrète

La loi d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par la donnée d'un ensemble fini ou dénombrable de couples de réels $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ▶ les x_i sont deux à deux distincts
- ▶ pour chaque i , $0 \leq p_i \leq 1$
- ▶ $\sum_i p_i = 1$

Chaque fois que l'on a un tel ensemble de couples, on peut définir la loi d'une variable aléatoire discrète X par

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

(Si les p_i sont tous strictement positifs, l'ensemble des x_i s'appelle le **support** de X)

Variables discrètes indépendantes

Si X est une variable aléatoire discrète de support $\{x_i : i \in I\}$, avec les probabilités associées p_i (i.e., $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$) et Y une variable aléatoire discrète de support $\{y_j : j \in J\}$ avec les probabilités associées q_j , on a nécessairement

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_i q_j$$

pour tous $i \in I, j \in J$.

Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire X , notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

sous réserve que la série soit absolument convergente (sinon, la variable aléatoire n'a pas d'espérance)

Formule de transfert

Si X est une variable aléatoire discrète, et f une fonction (réelle, d'une variable réelle), alors $Y = f(X)$ (plus formellement, $Y = f \circ X$) est une variable aléatoire, définie sur le même espace, et dont l'espérance est donnée par la **formule de transfert**

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

(toujours, sous réserve de convergence ; il se peut que Y ait une espérance et pas X , ou que X ait une espérance et pas Y)

Propriétés de l'espérance

- ▶ Variable aléatoire constante : si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.

Propriétés de l'espérance

- ▶ Variable aléatoire constante : si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- ▶ Positivité : si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Propriétés de l'espérance

- ▶ Variable aléatoire constante : si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- ▶ Positivité : si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- ▶ Conséquence : si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Propriétés de l'espérance

- ▶ Variable aléatoire constante : si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- ▶ Positivité : si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- ▶ Conséquence : si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- ▶ Linéarité : si $Z = aX + bY$, alors $\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.

Propriétés de l'espérance

- ▶ Variable aléatoire constante : si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- ▶ Positivité : si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- ▶ Conséquence : si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- ▶ Linéarité : si $Z = aX + bY$, alors $\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
- ▶ Convexité : si f est une fonction **convexe** sur \mathbb{R} , alors $\mathbb{E}(f(X)) \geq f(\mathbb{E}(X))$

Propriétés de l'espérance

- ▶ Variable aléatoire constante : si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- ▶ Positivité : si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- ▶ Conséquence : si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- ▶ Linéarité : si $Z = aX + bY$, alors $\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
- ▶ Convexité : si f est une fonction **convexe** sur \mathbb{R} , alors $\mathbb{E}(f(X)) \geq f(\mathbb{E}(X))$
- ▶ Indépendance : si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

(la réciproque est totalement **fausse**)

Espérance d'une variable entière positive

Si X est une variable aléatoire dont le support est inclus dans \mathbb{N} (i.e., X ne prend que des valeurs entières positives ou nulles), alors on a une formule alternative pour l'espérance de X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$$

Cette formule permet de calculer l'espérance si l'on connaît la fonction de répartition (ou plutôt la fonction complémentaire à 1 : $\mathbb{P}(X > k) = 1 - F_X(k)$).

Variance

La **variance** $\mathbf{Var}(X)$ d'une variable aléatoire X est définie (sous réserve de convergence) par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Variance

La **variance** $\mathbf{Var}(X)$ d'une variable aléatoire X est définie (sous réserve de convergence) par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

La variance (si elle existe) est **toujours positive ou nulle**, et ne peut être nulle que dans le cas d'une variable aléatoire **constante**.

Variance

La **variance** $\mathbf{Var}(X)$ d'une variable aléatoire X est définie (sous réserve de convergence) par

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

La variance (si elle existe) est **toujours positive ou nulle**, et ne peut être nulle que dans le cas d'une variable aléatoire **constante**.
La racine carrée de la variance se nomme l'écart-type, et est typiquement notée σ ou σ_X .

Covariance

La **covariance** de deux variables aléatoires X et Y existe dès que X et Y ont chacune une variance, et est définie par

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

(c'est la version disymétrique de la variance :

$$\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{Var}(X))$$

Covariance

La **covariance** de deux variables aléatoires X et Y existe dès que X et Y ont chacune une variance, et est définie par

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

(c'est la version disymétrique de la variance :

$$\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{Var}(X))$$

La covariance **peut** être négative ou nulle.

Propriétés

- ▶ bilinéarité : $\mathbf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathbf{Cov}(X, Z) + b\mathbf{Cov}(Y, Z)$

Propriétés

- ▶ bilinéarité : $\mathbf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathbf{Cov}(X, Z) + b\mathbf{Cov}(Y, Z)$
- ▶ $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$

Propriétés

- ▶ bilinéarité : $\mathbf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathbf{Cov}(X, Z) + b\mathbf{Cov}(Y, Z)$
- ▶ $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- ▶ Si X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$$

Propriétés

- ▶ bilinéarité : $\mathbf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathbf{Cov}(X, Z) + b\mathbf{Cov}(Y, Z)$
- ▶ $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- ▶ Si X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$$

- ▶ Dans tous les cas,

$$\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

(la formule dans le polycopié est **fausse**, il manque le facteur 2)

Propriétés

- ▶ bilinéarité : $\mathbf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathbf{Cov}(X, Z) + b\mathbf{Cov}(Y, Z)$
- ▶ $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- ▶ Si X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$$

- ▶ Dans tous les cas,

$$\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

(la formule dans le polycopié est **fausse**, il manque le facteur 2)

- ▶ Plus généralement, si $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$,

$$\mathbf{Var}(Z) = \sum_{k=1}^n \mathbf{Var}(X_k) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \mathbf{Cov}(X_j, X_k)$$

Série génératrice de probabilités

La **série génératrice de probabilités** S_X d'une variable aléatoire entière (positive) X (ou de sa loi) est un moyen commode de présenter "d'un seul coup" la loi : elle est définie, au moins pour $|z| \leq 1$, par la série entière

$$S_X(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)z^n$$

Série génératrice de probabilités

La **série génératrice de probabilités** S_X d'une variable aléatoire entière (positive) X (ou de sa loi) est un moyen commode de présenter "d'un seul coup" la loi : elle est définie, au moins pour $|z| \leq 1$, par la série entière

$$S_X(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)z^n$$

- ▶ rayon de convergence au moins égal à 1

Série génératrice de probabilités

La **série génératrice de probabilités** S_X d'une variable aléatoire entière (positive) X (ou de sa loi) est un moyen commode de présenter "d'un seul coup" la loi : elle est définie, au moins pour $|z| \leq 1$, par la série entière

$$S_X(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)z^n$$

- ▶ rayon de convergence au moins égal à 1
- ▶ $S_X(1) = 1$

Série génératrice de probabilités

La **série génératrice de probabilités** S_X d'une variable aléatoire entière (positive) X (ou de sa loi) est un moyen commode de présenter "d'un seul coup" la loi : elle est définie, au moins pour $|z| \leq 1$, par la série entière

$$S_X(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)z^n$$

- ▶ rayon de convergence au moins égal à 1
- ▶ $S_X(1) = 1$
- ▶ $S'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $S''_X(1) = \mathbb{E}(X(X - 1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$

Série génératrice de probabilités

La **série génératrice de probabilités** S_X d'une variable aléatoire entière (positive) X (ou de sa loi) est un moyen commode de présenter “d'un seul coup” la loi : elle est définie, au moins pour $|z| \leq 1$, par la série entière

$$S_X(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)z^n$$

- ▶ rayon de convergence au moins égal à 1
- ▶ $S_X(1) = 1$
- ▶ $S'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $S''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$
- ▶ Si X et Y sont indépendantes, alors

$$S_{X+Y}(z) = S_X(z)S_Y(z)$$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable indicatrice d'un événement** : si A est un événement (n'importe lequel), la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_A$ définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est typiquement appelée variable indicatrice de l'événement A

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable indicatrice d'un événement** : si A est un événement (n'importe lequel), la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_A$ définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est typiquement appelée variable indicatrice de l'événement A

- ▶ C'est une **variable de Bernoulli** de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable indicatrice d'un événement** : si A est un événement (n'importe lequel), la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_A$ définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est typiquement appelée variable indicatrice de l'événement A

- ▶ C'est une **variable de Bernoulli** de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.
- ▶ (Tirage à pile ou face biaisé si $p \neq 1/2$, équilibré si $p = 1/2$)

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable indicatrice d'un événement** : si A est un événement (n'importe lequel), la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_A$ définie par

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est typiquement appelée variable indicatrice de l'événement A

- ▶ C'est une **variable de Bernoulli** de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.
- ▶ (Tirage à pile ou face biaisé si $p \neq 1/2$, équilibré si $p = 1/2$)
- ▶ $\mathbb{E}(X) =$
- ▶ $\text{Var}(X) =$
- ▶ $S_X(z) =$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi binomiale** : une variable aléatoire B suit la loi binomiale de paramètres (n, p) (n entier positif, $0 < p < 1$) lorsque l'on a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(B = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi binomiale** : une variable aléatoire B suit la loi binomiale de paramètres (n, p) (n entier positif, $0 < p < 1$) lorsque l'on a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(B = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- ▶ C'est la loi de la **somme** de n variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes, toutes de même paramètre p (nombre de "succès" en n essais indépendants, chaque essai ayant probabilité p de succès)

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi binomiale** : une variable aléatoire B suit la loi binomiale de paramètres (n, p) (n entier positif, $0 < p < 1$) lorsque l'on a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(B = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- ▶ C'est la loi de la **somme** de n variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes, toutes de même paramètre p (nombre de "succès" en n essais indépendants, chaque essai ayant probabilité p de succès)
- ▶ $\mathbb{E}(B) =$
- ▶ $\text{Var}(B) =$
- ▶ $S_B(z) =$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable géométrique** : une variable géométrique G de paramètre p ($0 < p < 1$) est une variable à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(G = k) = (1 - p)^{k-1} p \text{ (pour } k \geq 1)$$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable géométrique** : une variable géométrique G de paramètre p ($0 < p < 1$) est une variable à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(G = k) = (1 - p)^{k-1} p \text{ (pour } k \geq 1)$$

- ▶ C'est ce que l'on obtient si l'on effectue une suite de *tirages de Bernoulli* indépendants, tous de paramètre p , et que l'on définit G comme le **nombre de tirages jusqu'au premier qui donne 1** (inclus)

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable géométrique** : une variable géométrique G de paramètre p ($0 < p < 1$) est une variable à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(G = k) = (1 - p)^{k-1} p \text{ (pour } k \geq 1)$$

- ▶ C'est ce que l'on obtient si l'on effectue une suite de *tirages de Bernoulli* indépendants, tous de paramètre p , et que l'on définit G comme le **nombre de tirages jusqu'au premier qui donne 1** (inclus)
- ▶ $\mathbb{P}(G > k) = (1 - p)^k$ pour $k \geq 0$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable géométrique** : une variable géométrique G de paramètre p ($0 < p < 1$) est une variable à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(G = k) = (1 - p)^{k-1} p \text{ (pour } k \geq 1)$$

- ▶ C'est ce que l'on obtient si l'on effectue une suite de *tirages de Bernoulli* indépendants, tous de paramètre p , et que l'on définit G comme le **nombre de tirages jusqu'au premier qui donne 1** (inclus)
- ▶ $\mathbb{P}(G > k) = (1 - p)^k$ pour $k \geq 0$
- ▶ $F_G(x) = 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor}$ pour $x \geq 0$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Variable géométrique** : une variable géométrique G de paramètre p ($0 < p < 1$) est une variable à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(G = k) = (1 - p)^{k-1} p \text{ (pour } k \geq 1)$$

- ▶ C'est ce que l'on obtient si l'on effectue une suite de *tirages de Bernoulli* indépendants, tous de paramètre p , et que l'on définit G comme le **nombre de tirages jusqu'au premier qui donne 1** (inclus)
- ▶ $\mathbb{P}(G > k) = (1 - p)^k$ pour $k \geq 0$
- ▶ $F_G(x) = 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor}$ pour $x \geq 0$
- ▶ $\mathbb{E}(G) =$
- ▶ $\text{Var}(G) =$
- ▶ $S_G(z) =$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi de Poisson** : pour n'importe quel paramètre réel $\lambda > 0$, Z suit la loi de Poisson de paramètre λ si sa loi est donnée par (pour $k \geq 0$)

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi de Poisson** : pour n'importe quel paramètre réel $\lambda > 0$, Z suit la loi de Poisson de paramètre λ si sa loi est donnée par (pour $k \geq 0$)

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- ▶ Cette loi d'apparence arbitraire est très souvent utilisée pour modéliser les “événements rares” (nombre d'étudiants absents ; nombre de clients entrant dans un magasin chaque minute ; historiquement : nombre de soldats tués chaque année par un coup de sabot de cheval)

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi de Poisson** : pour n'importe quel paramètre réel $\lambda > 0$, Z suit la loi de Poisson de paramètre λ si sa loi est donnée par (pour $k \geq 0$)

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- ▶ Cette loi d'apparence arbitraire est très souvent utilisée pour modéliser les “événements rares” (nombre d'étudiants absents ; nombre de clients entrant dans un magasin chaque minute ; historiquement : nombre de soldats tués chaque année par un coup de sabot de cheval)
- ▶ Si n est grand, la loi binomiale de paramètre $(n, \lambda/n)$ est très bien approchée par la loi de Poisson de paramètre λ

Exemples de lois discrètes

- ▶ **Loi de Poisson** : pour n'importe quel paramètre réel $\lambda > 0$, Z suit la loi de Poisson de paramètre λ si sa loi est donnée par (pour $k \geq 0$)

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- ▶ Cette loi d'apparence arbitraire est très souvent utilisée pour modéliser les “événements rares” (nombre d'étudiants absents ; nombre de clients entrant dans un magasin chaque minute ; historiquement : nombre de soldats tués chaque année par un coup de sabot de cheval)
- ▶ Si n est grand, la loi binomiale de paramètre $(n, \lambda/n)$ est très bien approchée par la loi de Poisson de paramètre λ
- ▶ $\mathbb{E}(Z) =$
- ▶ $\text{Var}(Z) =$
- ▶ $S_Z(z) =$